הרצאה מספר 32
אלגברה 1 מ 104016

הנושא: דטרמיננטים:
כלל קרמר
הוכחה לגבי פיתוח לפי עמודה ראשונה
תמורות

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.22 כלל קרמר

- **משפט: (כלל קרמר)** תהא A מטריצה הפיכה מסדר $n \times n$.
  אזי לכל $\vec{b} \in F^n$ הפתרון היחיד למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$
  נתון על ידי $x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$,
  כאשר B_j מתקבלת מ־ A על ידי החלפת עמודה j של A ב־ $\vec{b}$.

- **הערה:** נוכיח את המשפט בעזרת הנוסחא $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det A}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.22 כלל קרמר

- משפט: (כלל קרמר) הפתרון היחיד למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ נתון על ידי $x_j=\dfrac{\det B_j}{\det A}$, כאשר B_j מתקבלת מ־ A על ידי החלפת עמודה j של A ב־ $\vec{b}$. הנחה: A הפיכה.

- הוכחה: לפי ההנחה A הפיכה.
  - הפתרון היחיד של המערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ הוא $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$.
  - $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\left(\dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}\right)\vec{b}$.
  - x_j מתקבל כשורה j של $\dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$ כפול וקטור העמודה $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}\right)_{jk}\cdot b_k=\frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n}c_{kj}(A)b_k \\ &= \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n}c_{kj}(B_j)b_k=\frac{\det(B_j)}{\det(A)} \end{aligned}$$

$\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.22 כלל קרמר

- **משפט: (כלל קרמר)** הפתרון היחיד למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ נתון על ידי $x_j=\dfrac{\det B_j}{\det A}$, כאשר B_j מתקבלת מ־ A על ידי החלפת עמודה j של A ב־ $\vec{b}$. **הנחה: A הפיכה.**

- **דוגמה:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$$

$$\det B_1=\begin{vmatrix}c & 1\\ d & -1\end{vmatrix}=-c-d,\qquad \det B_2=\begin{vmatrix}1 & c\\ 1 & d\end{vmatrix}=d-c$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}(c+d)/2\\ (c-d)/2\end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.22 כלל קרמר

- <u>משפט: (כלל קרמר)</u> תהא A מטריצה הפיכה מסדר $n \times n$.
  אזי לכל $\vec{b} \in F^n$ הפתרון היחיד למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$
  נתון על ידי $x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$,
  כאשר B_j מתקבלת מ־ A על ידי החלפת עמודה j של A ב־ $\vec{b}$.

- <u>דוגמה:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} (c+d)/2 \\ (c-d)/2 \end{pmatrix}$$

- <u>בדיקה:</u>

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c+d)/2 \\ (c-d)/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c+d)/2 + (c-d)/2 \\ (c+d)/2 - (c-d)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.23 הוכחה של פיתוח לפי עמודה 1

תזכורת על סימונים:

- $A(i|j)$
- $A(i_1, i_2|j_1, j_2)$
- $M_{ij}(A) = \det(A(i|j))$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.23 הוכחה של פיתוח לפי עמודה 1

- הגדרה: (על פי פיתוח לפי שורה ראשונה)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}(A)$$

- טענה: פיתוח לפי עמודה ראשונה

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}(A)$$

- הוכחה: באינדוקציה לפי n.
- בסיס האינדוקציה: $n = 2$ שבו הבדיקה קלה.
  - הביטוי הראשון בשני הסכומים הוא $(-1)^{1+1} a_{11} M_{11}(A)$.
  - הביטוי השני בפיתוח לפי שורה $(-1)^{1+2} a_{12} M_{12}(A) = -a_{12} a_{21}$.
  - הביטוי השני בפיתוח לפי עמודה $(-1)^{2+1} a_{21} M_{21}(A) = -a_{21} a_{12}$.
- הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל המטריצות הריבועיות מסדר קטן מ־ n (ובפרט לסדר $n-1$).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.23 הוכחה של פיתוח לפי עמודה 1

- <u>שלב א':</u> פיתוח של $M_{1j} = \det(A(1|j))$ לפי עמודה ראשונה, עבור $j > 1$ (זה מותר לפי הנחת האינדוקציה).
- במטריצה $A(1|j)$ נמחקה השורה ראשונה של A,
- ולכן האיברים מהצורה a_{ik} עכשיו מופיעים בשורה $i-1$.
- לכן, הפיתוח לפי העמודה הראשונה נותן:

$$\begin{aligned} M_{1j} = \det(A(1|j)) &= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{(i-1)+1} a_{i1} M_{(i-1)1}(A(1|j)) \\ &= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{(i-1)+1} a_{i1} \det(A(1,i|1,j)) \end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.23 הוכחה של פיתוח לפי עמודה 1

- <u>שלב ב':</u> שילוב של התוצאה הקודמת בפיתוח לפי שורה ראשונה של $\det A$.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}(A) \\
&= a_{11}M_{11}(A) + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}(A) \\
&= a_{11}M_{11}(A) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}\det(A(1,i|1,j))\right) \\
&= a_{11}M_{11}(A) + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}\det(A(1,i|1,j))
\end{aligned}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.23 הוכחה של פיתוח לפי עמודה 1

- <u>שלב ג':</u> פיתוח של $M_{i1} = \det(A(i|1))$ לפי שורה ראשונה, עבור $i > 1$ (לפי ההגדרה).
- במטריצה $A(i|1)$ נמחקה העמודה ראשונה של A,
- ולכן האיברים מהצורה a_{kj} עכשיו מופיעים בעמודה $j-1$.
- לכן, הפיתוח לפי השורה הראשונה נותן:

$$\begin{aligned} M_{i1} = \det(A(i|1)) &= \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+(j-1)} a_{1j} M_{1(j-1)}(A(i|1)) \\ &= \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+(j-1)} a_{1j} \det(A(1,i|1,j)) \end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.23 הוכחה של פיתוח לפי עמודה 1

- <u>שלב ד':</u> שילוב של התוצאה הקודמת בפיתוח לפי עמודה ראשונה של $\det A$.

$$\begin{aligned}
\det(A) \quad ? = & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}(A) \\
= & \quad a_{11}M_{11}(A) + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}(A) \\
= & \quad a_{11}M_{11}(A) + \\
& + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\left(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+(j-1)}a_{1j}\det(A(1,i|1,j))\right) \\
= & \quad a_{11}M_{11}(A) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i1}a_{1j}\det(A(1,i|1,j))
\end{aligned}$$

- בשלב ב' ראינו שהתוצאה הסופית שכאן שווה ל־ $\det(A)$.

לכן הפיתוח לפי העמודה הראשונה אכן גם נותן את $\det(A)$. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

המשך המצגת מכיל חומר שלא למבחן בסמסטר הנוכחי

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.24 תמורות

- הגדרה: **תמורה** מסדר n היא פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$ לעצמה.
- נהוג לסמן תמורות באותיות יוניות קטנות, לרוב ב־ σ, וב־ τ.
- דוגמאות מסדר $n = 3$:

$$\tau : \begin{cases} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{cases} \qquad \sigma : \begin{cases} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 \end{cases}$$

$$\tau = (2, 3, 1) \qquad \sigma = (2, 1, 3)$$

- יש מספר סימונים לתמורות. אנו נשתמש בסימון מתומצת שנקראת "סימון בשורה אחד" (one line notation).
  - רושמים את **התמונות** של $1, 2, \ldots$ לפי סדר בוקטור שורה.
  - התמורה σ מקודדת על ידי הוקטור $\Big(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\Big)$.
  - כל מספר בקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$ יופיע בדיוק פעם אחד.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

- **דוגמה:** $\sigma = (2,5,4,3,1)$ **הוא קידוד של**

$$\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 2 & \qquad 4 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 5 & \qquad 5 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 & \end{cases}$$

- **הגדרה:** **החבורה הסימטרית,** S_n, **(symmetric group) היא קבוצת כל התמורות מסדר** n **עם פעולה של הרכבת פונקציות (כפעולת כפל).**
- **יש** n **אפשריות ל־** $\sigma(1)$, $n-1$ **אפשריות ל־** $\sigma(2)$, $n-2$ **אפשריות ל־** $\sigma(3)$, $\ldots$
  2 **אפשריות ל־** $\sigma(n-1)$, **ואז נשאר רק אפשריות יחידה ל־** $\sigma(n)$.
- **לכן** $|S_n| = n!$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

- **הגדרה:** עבור $i \neq j$ (i,j)־חילוף הוא תמורה שמחליפה את i ו־j ומשאיר כל מספר אחר במקומו
  כלומר $\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i, \quad \sigma(k) = k \ \ \forall k \notin \{i,j\}$.
- **דוגמה:** $\sigma = (1,4,3,2,5)$ הוא $(2,4)$־חילוף מסדר 5.
- **דוגמה:** $\tau = (1,5,3,4,2)$ הוא $(2,5)$־חילוף מסדר 5.
- **חישוב** $\tau \cdot \sigma$:

$$\tau \cdot \sigma : \begin{cases} 1 \overset{\sigma}{\mapsto} 1 \overset{\tau}{\mapsto} 1 \\ 2 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \overset{\tau}{\mapsto} 4 \\ 3 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \overset{\tau}{\mapsto} 3 \\ 4 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \overset{\tau}{\mapsto} 5 \\ 5 \overset{\sigma}{\mapsto} 5 \overset{\tau}{\mapsto} 2 \end{cases}$$

$\tau \cdot \sigma = (1,4,3,5,2)$

ותמורה זאת איננה חילוף.

חישוב $\sigma \cdot \tau$:

$$\sigma \cdot \tau : \begin{cases} 1 \overset{\tau}{\mapsto} 1 \overset{\sigma}{\mapsto} 1 \\ 2 \overset{\tau}{\mapsto} 5 \overset{\sigma}{\mapsto} 5 \\ 3 \overset{\tau}{\mapsto} 3 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \\ 4 \overset{\tau}{\mapsto} 4 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \\ 5 \overset{\tau}{\mapsto} 2 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \end{cases}$$

$\sigma \cdot \tau = (1,5,3,2,4)$

ותמורה זאת איננה חילוף.

- הפעולה של כפל תמורות **איננה** חילופית. בדוגמה $\tau \cdot \sigma \neq \sigma \cdot \tau$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.24 תמורות

- <u>משפט:</u> כל תמורה $\sigma \in S_n$ ניתן לקבל כמכפילה של חילופים.
- <u>משפט:</u> בכל יצוג של תמורה $\sigma \in S_n$ כמכפילה של חילופים הזוגיות של מספר החילופים שווה.

  כלומר, אין תמורה שניתן לייצג גם כמכפילה של מספר זוגי של חילופים וגם כמכפילה של מספר אי־זוגי של חילופים.
- <u>הגדרה:</u> אומרים שתמורה היא זוגית (אי־זוגית) אם כל יצוג שלה כמכפילה של חילופים משתמש במספר זוגי (אי־זוגי) של חילופים.
- <u>הגדרה:</u> פונקצית הסימן: $\operatorname{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$ מוגדרת על ידי:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ היא זוגית,} \\ -1, & \sigma \text{ היא אי־זוגית,} \end{cases}$$

- מכיון שכפל של תמורה בחילוף משנה את הזוגיות:
  - בדיוק חצי התמורות הן זוגיות.
  - בדיוק חצי התמורות הן אי־זוגיות.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.24 תמורות

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ היא זוגית,} \\ -1, & \sigma \text{ היא אי־זוגית,} \end{cases}$$

- עבור $n = 2$: $\operatorname{sign}((1,2)) = +1$, $\operatorname{sign}((2,1)) = -1$.
- עבור $n = 3$:
  - היחידה תמיד זוגית:
    $\operatorname{sign}((1,2,3)) = +1$
  - החילופים הם תמורות אי־זוגיות:
    $\operatorname{sign}((1,3,2)) = -1$
    $\operatorname{sign}((3,2,1)) = -1$
    $\operatorname{sign}((2,1,3)) = -1$
  - שתי התמורות הנותרות הן זוגיות:
    $\operatorname{sign}((2,3,1)) = +1 \qquad (3,2,1) \cdot (2,1,3) = (2,3,1)$
    $\operatorname{sign}((3,1,2)) = +1 \qquad (1,3,2) \cdot (2,1,3) = (3,1,2)$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.25 הגדרת דטרמיננטה בעזרת תמורות

$$(\star) \qquad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

$\underline{n = 3}$:

$$\det(A) = + \underset{\sigma=(1,2,3)}{a_{11}a_{22}a_{33}} - \underset{\sigma=(1,3,2)}{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$- \underset{\sigma=(2,1,3)}{a_{12}a_{21}a_{33}} + \underset{\sigma=(2,3,1)}{a_{12}a_{23}a_{31}}$$

$$+ \underset{\sigma=(3,1,2)}{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underset{\sigma=(3,2,1)}{a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$\operatorname{sign}\big((1,2,3)\big)=+1$

$\operatorname{sign}\big((1,3,2)\big)=-1$

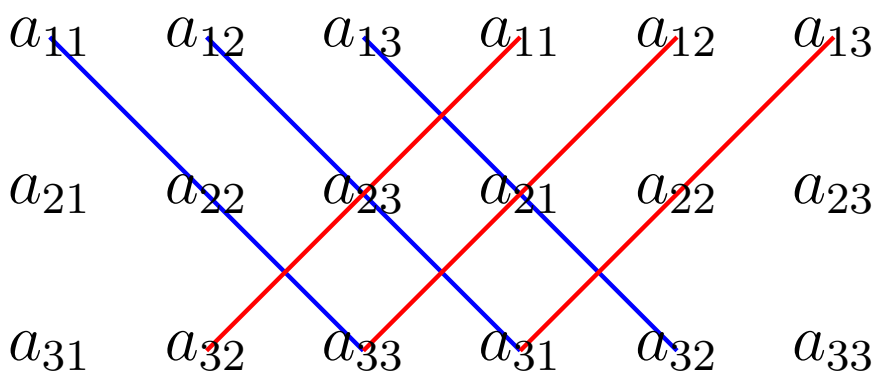
$\operatorname{sign}\big((2,1,3)\big)=-1$

$\operatorname{sign}\big((2,3,1)\big)=+1$

$\operatorname{sign}\big((3,1,2)\big)=+1$

$\operatorname{sign}\big((3,2,1)\big)=-1$

הסבר ציורי:



©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

7.25 הגדרת דטרמיננטה בעזרת תמורות

$$(\star) \qquad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

- אפשר להוכיח את הנכונות של הנוסחא $(\star)$ לחישוב דטרמיננטה על בסיס ההגדרה שנתנו (פיתוח לפי שורה ראשונה):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}(A)$$

- כמו כן, אפשר להוכיח את את נוסחת הפיתוח לפי שורה ראשונה מהנוסחא $(\star)$.
- לכן, ניתן להשתמש בכל אחד מהן כהגדרת הדטרמיננטה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות